- *Ax=K  sisteminin çözümü*

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & . & . & a_{1n} & K_1 \\ a_{21} & . & . & a_{2n} & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} & K_n \end{array}\right]$$

*Genişletilmiş matrise elemanter satır işlemleri uygulanarak A(Katsayılar matrisi) matrisi üçgen matris(köşegen altındaki elemanlar 0 olan matris) haline getirilir ve genişletilmiş matristen yaralanılarak bilinmeyenler ($x_i$ i=1.......n) bulunur. Bilinmeyenler sistemin çözümüdür.*

*Elemanter satır işlemleri*

1. *İki satırın yerlerini değiştirmek*
2. *Bir satırı skaler sayı ile çarpmak*
3. *Skalerle çarpılmış bir satırı diğer bir satırla toplamak*

*Örnekler*

$2x_1+4x_2+3x_3+2x_4=2$
$3x_1+6x_2+5x_3+2x_4=2$
$2x_1+5x_2+2x_3-3x_4=3$
$4x_1+5x_2+14x_3+14x_4=11$ *denklem sistemini çözünüz.*

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 11 \end{array}\right]$$

*2.satırla 3 satırı yer değiştirelim*

$$[A|K]=\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 11 \end{array}\right] & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \end{array}$$

*(-1)$R_1$+$R_2$, (-3/2) $R_1$+$R_3$ ve (-2) $R_1$+$R_4$ satır işlemlerini uygular ve daha sonra 3 satırı 2 ile çarparsak(2*$R_3$)*

$$[A|K]=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & 7 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

elde edilir. Daha sonra da sırasıyla (3$R_2$+$R_4$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

($R_4$/5) ve (-$R_3$+$R_4$) satır işlemleri ile

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

elde edilir. $x_4=4$ bulunur. Diğer denklemler yazılarak

$x_3-2x_4=-2$

$x_2-x_3-5x_4=1$

$2x_1+4x_2+3x_3+2x_4=2$

$x_1=-66$, $x_2=27$, $x_3=6$, bulunur.

$$x_{genel}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 66 \\ 27 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Örnek

**$y^{IV}+y^{III}-7y^{II}-y'+6y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=-1$ başlangıç koşulları için çözünüz.**

**$y^{IV}=r^4$**

**$y^{III}=r^3$**

**$y^{II}=r^2$** $r^4+r^3-7r^2-r+6=0$ **(karakteristik denklem)**

**$y^{I}=r$**

**$y=1$**

$r^4+r^3-7r^2-r+6=0$ denklemin değişmez sayısı 6 olup bunun bölenleri $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ dır. $a_0=\pm1$dir. $p/q=(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$ Bu nedenle mümkün olan rasyonel kökler $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ dır. Bunlar karakteristik denklemde yerlerine konularak test edilirse 1,-1, 2 ve -3 karakteristik denklemin kökleridir. Öyleyse genel çözüm

**$r^4+r^3-7r^2-r+6/(r^2-1)=r^2+r-6$** **$(r-1)(r+1)(r^2+r-6)=0$**

$$y_{genel}=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-3t} \qquad (1)$$

dir. Başlangıç koşulları ile

**$y(0)=1$ için $(t=0, y=1)$** $c_1+c_2+c_3+c_4=1$

$y'_{genel}=c_1e^{t}-c_2e^{-t}+2c_3e^{2t}-3c_4e^{-3t}$

**$y'(0)=0$ için $(t=0, y'=1)$** $c_1-c_2+2c_3-3c_4=0$

$y''_{genel}=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+4c_3e^{2t}+9c_4e^{-3t}$

**$y''(0)=-2$ için $(t=0, y''=-2)$** $c_1+c_2+4c_3+9c_4=-2$

$y'''_{genel}=c_1e^{t}-c_2e^{-t}+8c_3e^{2t}-27c_4e^{-3t}$

**$y'''(0)=-1$ için $(t=0, y=-1)$** $c_1-c_2+8c_3-27c_4=-1$

denklemleri elde edilir.

$c_1+c_2+c_3+c_4=1$
$c_1- c_2+2c_3-3\ c_4=0$
$c_1+c_2+4c_3+9c_4=-2$
$c_1- c_2+8c_3-27\ c_4=-1$ elemanter satır işlemleri ile

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 9 & -2 \\ 1 & -1 & 8 & -27 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & -2 & 7 & -28 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ -R_1+R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -24 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ -R_2+R_4 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ -2R_3+R_4 \end{array}$$

$-40\ c_4=5$ ile $c_4=-1/8$ geri kalan denklemleri yazarsak

$3c_3+8c_4=-3$
$-2c_2+c_3-4c_4=-1$
$c_1+c_2+c_3+c_4=1$

$c_1=11/8$, $c_2=5/12$, $c_3=-2/3$, bulunur. ***(1)*** yerlerine konarak

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y= 11/8e^{t}+5/12e^{-t}-2/3e^{2t}+-1/8e^{-3t}$$

şeklinde elde edilir.