1) y''-xy'-y=0 $x=x_0=0$ adi nokta civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz

P(x)=1 sabit değer olduğundan her nokta adi noktadır.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4........ \qquad =\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

$$y''=2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+....=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+2)}$$

reküran̈s bağıntısı buluınur

n=0 için $a_2=\frac{a_0}{2}$

n=1 için $a_3=\frac{a_1}{3}$

n=2 için $a_4=\frac{a_2}{4}=\frac{a_0}{2.4}$

n=3 için $a_5=\frac{a_3}{5}=\frac{a_1}{3.5}$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$$

$$y=a_0+a_1x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_1}{3}x^3+\frac{a_0}{2.4}x^4+\frac{a_1}{3.5}x^5$$

$$y=a_0(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.4}x^4+\ldots)+a_1(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3.5}+....)$$

2) 2y''+xy'+3y=0 0 $x=x_0=0$ adi nokta civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4........ \qquad =\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

$y'' = 2a_2 + \ldots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n = 0$$

$$x^n\left[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 3a_n\right] = 0$$

a nın enbüyük indisli terimi olan a_{n+2} yalnız bırakılarak reküırans bağıntısı;

$$a_{n+2} = \frac{-a_n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

elde edilir. Bu bağıntıda n=0,1,2,3,... değerleri verilerek katsayılar bulunur.

n=0 için $a_2 = \dfrac{-3a_0}{2.1.2} = \dfrac{-3a_0}{4}$

n=1 için $a_3 = \dfrac{-.a_1 4}{2.2.3} = \dfrac{-4a_1}{4.3} = \dfrac{-a_1}{3}$

n=2 için $a_4 = \dfrac{-a_2 5}{2.3.4} = \dfrac{-5a_2}{24} = \dfrac{15a_0}{96}$

n=3 için $a_5 = \dfrac{-a_3 6}{2.4.5} = \dfrac{6a_1}{2.3.4.5} = \dfrac{a_1}{20}$

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

$y = a_0 + a_1x + \dfrac{-3a_0}{4}x^2 + \dfrac{-a_1}{3}x^3 + \dfrac{15a_0}{96}x^4 + \dfrac{a_1}{20}x^5$

$y = a_0(1 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{15}{96}x^4 + \ldots) + a_1(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{20} + \ldots.)$

$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$

3) (1-x)y''+xy'-y=0 $x=x_0=0$ adi nokta civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz.

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots\ldots.. = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$

$y^{'}=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$

$y^{''}= 2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+....=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

x^n parantezine almak için 2 terimi n=1 den başlatarak n=n-1 yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$x^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n\right] = 0$$

a nın enbüyük indisli terimi olan a_{n+2} yalnız bırakılarak reküans bağıntısı;

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

elde edilir. Bu bağıntıda n=0,1,2,3,... değerleri verilerek katsayılar bulunur.

n=0 için $a_2 = \frac{a_0}{1.2}$

n=1 için $a_3 = \frac{1.2.a_2}{2.3} = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{1.2.3}$

n=2 için $a_4 = \frac{2.3.a_3 - a_2}{3.4} = \frac{a_2}{2.3.4} = \frac{a_0}{1.2.3.4}$

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$

$y=a_0+a_1x+\frac{a_0}{1.2}x^2+\frac{a_0}{1.2.3}x^3+\frac{a_0}{1.2.3.4}x^4= a_0(1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+..)+a_1x$

$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$

4)(1+x²)y''-4xy'+6y=0 ***$x=x_0=0$ civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz***

$P(x)=(1+x^2)=0$ tekil nokta, diğer tüm noktalar adi nokta

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+ a_3x^3+a_4x^4........ \qquad =\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y'=a_1+2a_2x+......+(n-1)a_{n-1}x^{n-2} +na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ $\qquad y''+x^2y''-4xy'+6y=0$

$y''=2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+.... =\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \mathbf{-4}\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \mathbf{+6}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathbf{=0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \mathbf{-4}\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \mathbf{+6}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathbf{=0}$$

$$x^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n\right] = 0$$

$$\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n(n^2-5n+6)\right] = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n(n^2-5n+6)}{(n+1)(n+2)}$$

rekürans bağıntısı buluınur

n=0 için $\quad a_2 = -\frac{a_0 6}{1.2} = -3a_0$

n=1 için $\quad a_3 = -\frac{a_1 2}{2.3} = -\frac{a_1}{3}$ $\qquad y=a_0+a_1x+a_2x^2+ a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$

n=2 için $\quad a_4 = -\frac{a_2 0}{3.5} = 0$

n=3 için $\quad a_5 = \frac{a_3 .0}{4.5} = 0$

$$y= a_0+a_1x - 3a_0x^2 - \frac{a_1}{3}x^3$$

$$y= a_0(1-3x^2)+a_1(x-\frac{x^3}{3})$$

5) $x^2(1-x^2)y''-2xy'+4y=0$ denkleminin tekil noktalarını bulunuz. Bu noktaları düzgün ve düzgün olmayan tekil noktalar olarak sınıflandırınız.

P(x)=$\boldsymbol{x^2(1-x^2)}$=0 x=0 ve x=±1 tekil noktalar

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} x\dfrac{-2x}{x^2(1-x^2)}=-2$

limitler sonlu değer

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} x^2\dfrac{4}{x^2(1-x^2)}=4$ $\qquad$ ***x=0 düzgün tekil nokta***

x= 1 tekil noktası için

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1}(x-1)\dfrac{-2x}{x^2(1-x^2)}=1$

limitler sonlu değer

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1}(x-1)^2\dfrac{4}{x^2(1-x^2)}=\mathbf{0}$ $\qquad$ ***x=1 düzgün tekil nokta***

x=-1 tekil noktası için

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1}(x+1)\dfrac{-2x}{x^2(1-x^2)}=\mathbf{1}$

limitler sonlu değer

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1}(x+1)^2\dfrac{4}{x^2(1-x^2)}=\mathbf{0}$ $\qquad$ ***x=-1 düzgün tekil nokta***

6) $2x^2y''+3xy'-y=0$ *euler diferansiyel denklemini çözünüz*

$y=x^r$ seçilir
$y'=rx^{r-1}$ $\qquad$ **$2r(r-1)x^r+3r\,x^r-x^r=0$**
$y''=r(r-1)\,x^{r-2}$

$x^r[2r(r-1)+3r-1]=0$ $\qquad$ **$2r^2+r-1=0$**

$r_1=1/2$, $r_2=-1$ iki farklı reel kök

$$\mathbf{y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}}$$

7) $x^2y''-2xy'+2y=2x\ln x$ *diferansiyel denklemi çözünüz*

$y=x^r$ seçilir
$y'=rx^{r-1}$
$y''=r(r-1)\,x^{r-2}$

$r(r-1)\,x^r-2rx^r+2x^r=0$ $\qquad$ **$(r^2-3r+2)\,x^r=0$ $r_1=2$, $r_2=1$ 2 farklı reel kök**

$$\mathbf{y=c_1x^{r1}+c_2x^{r2}}$$

$$\mathbf{y=c_1x^2+c_2x}$$

Parametrelerin değişimi yöntemi ile;

$\mathbf{y=u_1x^2+u_2x}$

$\mathbf{u_1' x^2+u_2' x=0}$
$\mathbf{2x\, u_1' + u_2' =2\ln x/x}$

$\mathbf{u_1' x^2+u_2' x=0}$
$\mathbf{-2x^2u_1' -u_2' x=-2\ln x}$ $\mathbf{-x^2u_1' =-2\ln x}$

$\mathbf{u_1' =2\ln x/x^2}$ $\mathbf{u_1}=\dfrac{-2\ln x}{x}+K_1=-\dfrac{\ln x^2}{x}+K_1$
$\mathbf{u_2' =-2\ln x/x}$ $\mathbf{u_2=-2(\ln x)^2+K_2}$

$$\mathbf{y_{genel}=K_1x^2+K_2x-x(\ln x)^2-2x\ln x}$$

8)- $x^2y''+xy'+(x-2)y=0$ $x=0$ civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz.

$P(x)=x^2$ $p(x)=0$ ile $x^2=0$
$Q(x)=x$
$R(x)=x-2$

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ $\lim_{x\to 0} x\dfrac{x}{x^2}=1=p_0$

sonlu bir değer olduklarından
Düzgün tekil nokta

$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ $\lim_{x\to 0} x^2\dfrac{x-2}{x^2}=-2=q_0$

$p_0=1$ ve $q_0=0$ değerleri

$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$ indis denkleminde yerlerine konursa

$r(r-1)+r-2=0$ $r^2-2=0$ $r_1=\sqrt{2}$, $r_2=-\sqrt{2}$ kökler reel ve farklı

$\mathbf{x=x_0=0}$ düzgün tekil nokta civarında seri çözümü ($\mathbf{a_0}\neq 0$)

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}$

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1}$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}$

verilen diferansiyel denklemde yerlerine konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = \mathbf{0}$$

İndis denklemi için ($a_0 \neq 0$) ile

$r(r-1)a_0x^r + r\,a_0x^r - 2\,a_0x^r + a_0x^{r+1} + ...$ x in en küçük üssü (x^r) parantezine alınırsa

indis denklemi

$x^r\left[r(r-1) + r - 2\right] = 0$ ile $\mathbf{r^2-2=0}$ elde edilir.

$r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$ kökler reel ve farklı

$$x^{r+n}\left[(r+n)(r+n-1)a_n + (r+n)a_n - 2a_n + a_{n-1}\right] = 0$$

$(r^2+2nr+n^2-r-n)a_n+(r+n)a_n-2a_n+a_{n-1}=0$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(r+n)^2 - 2}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Herbir kök değeri rekürans bağıntısında yerlerine konarak bunlara karşılık gelen bağıntılar elde edilir, bu bağıntılarda n=0,1,2,…… değerleri ile a_i (i=1,2,3,….) katsayılar belirlenerek $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ denkleminde yerlerine konarak genel çözüm elde edilir.

$r_1 = \sqrt{2}$ için

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(\sqrt{2}+n)^2 - 2} \quad n \geq 1$$

n=1 için $a_1 = -\dfrac{a_0}{1+2\sqrt{2}}$

n=2 için $a_2 = \dfrac{a_1}{(\sqrt{2}+2)^2-2} = \dfrac{a_0}{(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})2}$

katsayıları

$y_1(x)=a_0x^{r1}+a_1x^{r1+1}+a_2x^{r1+2}+$……………

ifadesinde yerlerine konarak lineer bağımsız birinci çözüm

$y_1(x)=a_0x^{\sqrt{2}} - \dfrac{a_0}{1+2\sqrt{2}}x^{\sqrt{2}+1} + \dfrac{a_0}{(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})2}x^{\sqrt{2}+2}$

$y_1(x)=a_0x^{\sqrt{2}}(1-\dfrac{x}{1+2\sqrt{2}} + \dfrac{x^2}{(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})2})$

$r_2=-\sqrt{2}$ için

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(-\sqrt{2}+n)^2-2}\ n \geq 1$$

n=1 için $a_1 = -\dfrac{a_0}{1-2\sqrt{2}}$

n=2 için $a_3 = \dfrac{a_1}{(-\sqrt{2}+2)^2-2} = \dfrac{a_0}{(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})2}$

katsayıları

$y_2(x)=a_0x^{r2}+a_1x^{r2+1}+a_2x^{r2+2}+$……………

ifadesinde yerlerine konarak lineer bağımsız ikinci çözüm

$y_2(x)=a_0x^{-\sqrt{2}} - \dfrac{a_0}{1-2\sqrt{2}}x^{-\sqrt{2}+1} + \dfrac{a_0}{(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})2}x^{-\sqrt{2}+2}$

$y_2(x)=a_0x^{-\sqrt{2}}(1-\dfrac{x}{1-2\sqrt{2}} + \dfrac{x^2}{(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})2})$

elde edilir. Genel çözüm

$$y_{genel}=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

9) ***$x^2y''+xy'+x^2y=0$ x=0 civarında iki bağımsız çözümünü bulunuz.***

P(x)= x^2 p(x)= 0 ile x^2= 0
Q(x)=x
R(x)= x^2

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad \lim_{x\to 0} x\frac{x}{x^2}=1=p_0$$

sonlu bir değer olduklarından
Düzgün tekil nokta

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \qquad \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2}{x^2}=0=q_0$$

p_0=1 ve q_0=0 değerleri

F(r) =r(r-1)+p_0r+q_0 indis denkleminde yerlerine konursa

r(r-1)+r=0 r^2=0 $r_{1,2}$=0 kökler eşit(katlı) bulunur.

x=x_0= 0 düzgün tekil nokta civarında seri çözümü ($a_0 \neq 0$)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}$$

verilen diferansiyel denklemde yerlerine konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2}=0$$

x^{r+n} parantezine alabilmek için indeks ötelemesi yapılarak son terimde n=n-2 yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n}+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{r+n}=0 \qquad \textbf{(a)}$$

sayısal değerler konularak x in en küçük derecesesini içeren denklem(İndis denklemi) elde edilir.

$$\mathbf{r(r-1)a_0x^r+ra_0\,x^r+a_0x^{r+2}+(r+1)ra_1x^{r+1}+(r+1)a_1x^{r+1}+a_1x^{r+3}+\ldots\ldots\ldots=0}$$

x in en küçük derecesi $\mathbf{x^r}$ olduğundan

$a_0x^r(r(r-1)+r)=0$ $r^2=0$ İndis denklemi $r_{1,2}=0$ kökler eşit(katlı) bulunur. Dikkat edilirse yukarıdaki indis denkleminden de aynı sonuç elde edilmişti.

n=1 için **$(r+1)^2\, a_1x^{r+1}=0$ dan $a_1=0$ olur.**

(a) ifadesinden reküran bağıntısı

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)(r+n-1)+(r+n)} = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)^2} \qquad n \geq 2$$

elde edilir. n e sayısal değerler verilerek

$$a_2 = \frac{-a_0}{(r+2)^2}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{(r+4)^2} = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{(r+6)^2} = \frac{-a_0}{(r+2)^2(r+4)^2(r+6)^2}$$

$a_1=0$ olduğundan $a_1=a_3=a_5=$..................$=0$ dır. Katsayılar yerlerine konarak

$$y = a_0x^r\left[1-\frac{x^2}{(r+2)^2}+\frac{x^4}{(r+2)^2(r+4)^2}-\frac{x^6}{(r+2)^2(r+4)^2(r+6)^2}-.......\right] \quad (1^{**})$$

Bu ifadede r=0 konursa ve $a_0$01 seçilirse lineer bağımsız çözümlerden biri

$$y_1(x) = 1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^24^2}-\frac{x^6}{2^24^26^2}$$

şeklinde bulunur. İkğinci lineer bağımsız çözümü bulmak için (1^{**}) serisinin r ye göre kısmi türevi alınıp $a_0=1$ seçilirse

$$y_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0}$$

$$y_2 = \left[x^r \ln x\left\{1-\frac{x^2}{(r+2)^2}+\frac{x^4}{(r+2)^2(r+4)^2}-.\right\}+x^r\left\{\frac{x^2}{(r+2)^2}\frac{2}{(r+2)}-\frac{x^4}{(r+2)^2(r+4)^2}\left(\frac{2}{(r+2)}+\frac{2}{(r+4)}\right)+..\right\}_{r=0}\right]$$

$$y_2 = y_1\ln x+\left[(\frac{x}{2})^2-\frac{1}{2^2}(\frac{x}{4})^4(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{6}(\frac{x}{4})^6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-...\right]$$