2006-2007 Eğitim-Öğretim Yılı Güz Dönemi
Diferansiyel Denklemler Dersi Çalışma Soruları 1

1) dy/dt +2y=sint **diferansiyel denklemini çözünüz.**

2) **(4+t)**dy/dt +y= 6+2t **diferansiyel denklemini çözünüz.**

3) dy/dt-3y=7 **diferansiyel denklemini y(0)=15 başlangıç koşulu için çözünüz.**

4) $\frac{2xy+3y^2}{2xy+x^2}=\frac{dy}{dx}$ **diferansiyel denklemini çözünüz**.

5) xy-dy/dx= $y^3e^{-x^2}$ **Bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.**

6) xdy-ydx= x^2e^xdx **x' e bağlı integrasyon çarpanı kullanarak diferansiyel denklemi çözünüz**

7) sinxcosydx+cosxsinydy=0 **tam diferansiyel denklemini çözünüz**

8) (ye^x+y)dx + (e^x+x)dy=0 **diferansiyel denklemini çözünüz**

9) $y = xy' + y'^3$ **diferansiyel denklemi çözünüz.**

10) y'=2tanxsecx-y^2sinx **Riccati diferansiyel denkleminin bir özel çözümü** y_1=secx **dir genel çözümü bulunuz.**

1) **y'+2y=sint** diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: y'+P(t)y=Q(t) tipi

$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 2dt} = e^{2t}$

$[\mu(t)y]' = \mu(t)Q(t)$ **ile** $[e^{2t}y]' = e^{2t}\sin t$

$e^{2t}y = \int e^{2t}\sin t\, dt = 1/5\, e^{2t}(2\sin t - \cos t) + c$

$$y = 1/5\,(2\sin t - \cos t) + ce^{-2t}$$

2) **(4+t)**dy/dt +y= 6+2t **diferansiyel denklemini çözünüz.**

dy/dt +1/**(4+t**)y= 6+2t /**(4+t)** : y'+P(t)y=Q(t) tipi

$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int (1/4+t)dt} = e^{\ln(1/(4+t))} = 1/(4+t)$

$[\mu(t)y]' = \mu(t)Q(t)$ **ile** $[1/(4+t)\, y]' = 6+2t$

$1/(4+t)y = 6t + t^2 + c$ $y = 6t + t^2 + c*(4+t)$

3) **dy/dt-3y=7** diferansiyel denklemini y(0)=15 başlangıç koşulu için çözünüz.

Çözüm: y'+P(t)y=Q(t) tipi

$\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int -3dt} = e^{-3t}$

$[\mu(t)y]' = \mu(t)Q(t)$ **ile** $[e^{-3t}y]' = 7e^{-3t}$

$e^{-3t}y = -7/3e^{-3t} + c$ $y = -7/3 + ce^{3t}$

y(0)=15 için 15=-7/3+c c=52/3 bulunur.

y= -7/3+52/3e^{3t}

4) $\dfrac{2xy+3y^2}{2xy+x^2}=\dfrac{dy}{dx}$ **diferansiyel denklemini çözünüz**

Homojen diferansiyel denklem

y= vx dy=vdx+xdv

(2xy+3y^2)dx-(2xy+x^2)dy=0 yerlerine konup düzenlenirse;

(v+v^2)dx= x(2v+1)dv

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{2v+1}{v+v^2}dv$ **integral alınarak**

lnx=ln(v+v^2)+c **v=y/x idi.**

Lnx=ln(y/x+(y/x)^2)+c $c=\ln\dfrac{x^3}{xy+y^2}$ $e^c=\dfrac{x^3}{xy+y^2}$

5) xy-dy/dx=$y^3e^{-x^2}$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

y'+P(x)y=Q(x)y^n bernoulli (n$\neq 0, n\neq 1$)

Çözüm:

u=y^{1-n} değişken dönüşümü ile u= y^{-2} olur.

$\dfrac{du}{dx}=-2y^3\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}y^3\dfrac{du}{dx}$ **çekilerek verilen dif. denklemde yerlerine konursa**

$$xy+\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}=y^3e^{-x^2}\quad\Big|\ \frac{1}{y^3}$$ **ile çarpalım.**

$$\frac{x}{y^2}+\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=e^{-x^2}\ \rightarrow\ \frac{1}{y^2}=u \qquad \textbf{(1)}$$

$xu+\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}=0$ **ile homojen çözüm bulunur.**

$xu = -\frac{1}{2}\frac{du}{dx}$

-2xdx=du/u **-2∫xdx=∫du/u** **$-x^2$+lnc=lnu**

lnu-lnc= $-x^2$ **ln(u/c)= $-x^2$**

$$u = c\,e^{-x^2} \qquad (2)$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin çözümü için c nin nasıl bir c(x) fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.(yani homjen çözümde c=c(x) koyalım türevleri alarak (1) yerlerine yazalım.

$u = c(x)\,e^{-x^2}$

$du/dx = u' = \frac{dc}{dx}e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2}$

$\frac{1}{2}(\frac{dc}{dx}e^{-x2} - 2xc(x)e^{-x^2}) + xc(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}$

$\frac{1}{2}\frac{dc}{dx}e^{-x^2} = e^{-x^2}$ **dc=2dx** **c=2x+c_1** **(3)**

(3) nolu ifade (2) yerine konur ve u=y^{-2} olduğu dikkate alınarak

$$y^{-2} = (2x+c_1)\,e^{-x^2}$$

elde edilir.

veya $xu + \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = e^{-x^2}$ $u' + 2xu = 2e^{-x^2}$ **ile**

$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

$[\mu(x)y]' = \mu(x)Q(x)$ **ile** $[\,e^{x^2}\,y\,]' = 2$ $y = (2x+c)\,e^{-x^2}$

6) **$xdy - ydx = x^2e^xdx$** **diferansiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm:

$-(y+x^2e^x)dx+xdy=0$ **$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$**

$M(x,y)= -(y+x^2e^x)$

$N(x,y)= x$ $\frac{\partial M}{\partial y}=-1$ $\frac{\partial N}{\partial x}=1$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$ **Tam diferansiyel değil.**

x' e bağlı integrasyon çarpanı:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{M_y-N_x}{N(x,y)}=\frac{-1-1}{x}=\frac{-2}{x}$$

yardımıyla integrasyon çarpanı

$$\mu=1/x^2$$

elde edilir. Verilen diferansiyel denklemle çarpılarak yani,
$1/x^2$ **$(-(y+x^2e^x)dx+xdy=0)$**

$$-(y/x^2+e^x)dx+1/x\ dy=0$$

elde edilir. Bu durumda

$M(x,y)= -(y/x^2+e^x)$

$N(x,y)= 1/x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}$$

tam diferansiyal denklem elde edilir.

$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ $F=\frac{y}{x}-e^x+g(y)$

dF=0 F=c **c=**$\frac{y}{x}-e^x$ veya **y=cx+xe^x**

$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ $F=\frac{y}{x}+m(x)$

7) ***sinxcosydx+cosxsinydy=0***

M(x,y)= ***sinxcosy***

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x \sin y$$ **Tam diferansiyel**

N(x,y)= ***cosxsiny***

dF= M(x,y)dx $\rightarrow$ F= -cosxcosy+g(y)

c=-cosxcosy

dF= N(x,y)dy $\rightarrow$ F= -cosxcosy +m(x)

8) ***(ye^x+y)dx+(e^x+x)dy=0*** diferansiyel denklemini çözünüz.

M(x,y)= ye^x+y

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=e^x+1$$ **Tam diferansiyel**

N(x,y)= e^x+x

dF= M(x,y)dx $\rightarrow$ F= ye^x+yx +g(y)

c= ye^x+yx

dF= N(x,y)dy $\rightarrow$ F= ye^x+yx +m(x)

9) $y=xy'+y'^3$ **diferansiyel denklemi çözünüz.**

$y=xy'+\varphi(y')$ şeklinde (Claıraut dif. denklemi)

Genel çözüm için **y' =c** yazılırsa

$$y_{genel}=xc+c^3$$

tekil çözüm için c'ye türev alınıp sıfıra eşitlenerek c ifadeden çekilerek parametrik denklemler elde edilir. Yani;

$x+3c^2=0$ $x=-3c^2$ $y=(-3c^2)c+c^3=-2c^3$

$c^2=-x/3$ c nin karşılığı $y=-2c^3$ de yerine konarak

$$y = -2\left(-\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{-x}{3}} = -2\sqrt{\frac{-x^3}{27}} \qquad \text{veya} \qquad y^2 = -4\frac{x^3}{27}$$

10) $y' = 2\tan x\sec x - y^2 \sin x$ **Riccati diferansiyel denkleminin bir özel çözümü** $y_1 = \sec x$ **dir genel çözümü bulunuz.**

$Q(x)= 2\tan x\sec x$, $R(x)= -\sin x$ $P(x)=$ 0 olmak üzere riccati tipi diferansiyel denklemdir. ($y'=P(x)y+R(x)y^2+Q(x)$ tipi)

$y=y_1+1/u$ dönüşümü kullanılarak türevler alınıp verilen diferansiyel denkleminde (**$y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x$**)yerlerine konursa , yani;

$y=\sec x+1/u$
$y'=\sin x/\cos^2x- u'/u^2= \tan x\sec x- u'/u^2$

$\tan x\sec x- u'/u^2=\mathbf{2\tan x\sec x-} (\sec x+1/u)^{\mathbf{2}}\mathbf{\sin x}$

$\tan x\sec x- u'/u^2=\mathbf{2\tan x\sec x-\sec^2x\sin x-2\sec x(1/u)\sin x-1/u^2\sin x}$

$\cancel{\tan x\sec x}- u'/u^2=\mathbf{\cancel{2\tan x\sec x-\tan x\sec x}-2\sec x(1/u)\sin x-(1/u^2)\sin x}$

$-u'/u^2=(-2/u)\tan x\mathbf{-(1/u^2)\sin x}$

$u'=2u\tan x+\sin x$
$u'-2u\tan x=\sin x$ 1.mertrebeden lineer dif denklem haline gelir.

$u=c/\cos^2x$
$c'=\cos^2x\sin x$
$c=- \cos^3x/3 +c_1$
$u=(- \cos^3x/3 +c_1)1/\cos^2x=(-1/3)\cos x+c_1/\cos^2x$

$$u= (-\cos^3x+c_1) / 3\cos^2x$$

bulunur $y=\sec x+1/u$ de yerine konarak genel çözüm

$y_{genel} =\sec x+1/(-\cos^3x+c_1) / 3\cos^2x$ veya

$$\mathbf{y_{genel} = \sec x+3\cos^2x /(-\cos^3x+c_1)}$$